УДК 514.763

Е. С. Корнев

Субтвисторные структуры и сублагранжевы подмногообразия

В работе даётся понятие субтвисторной и субкэлеровой структуры. Показано, что такие структуры являются обобщениями почти кэлеровых, почти контактных и симплектических структур. Рассмотрены специальные классы субтвисторных структур. С помощью таких структур вводится понятие сублагранжевых и сублежандровых подмногообразий, которые являются обобщением лагранжевых и лежандровых подмногообразий. Получены важные свойства таких подмногообразий. Отдельно рассмотрены сублагранжевы и сублежандровы подмногообразия в случае однородных пространств.

Ключевые слова: субтвисторная структура, субкэлерова структура, сублагранжево подмногообразие, радикал внешней формы.

§ 1. Введение

В данной работе изучаются геометрические задачи, для решения которых применимы введенные в [6] субтвисторные и субкэлеровы структуры. В частности, получение с их помощью в произвольном вещественном многообразии кэлеровых и почти кэлеровых подмногообразий, построение кэлеровых однородных пространств и разложение многообразий в прямое произведение подмногообразий. Субтвисторная структура – это набор следующих объектов: вырожденная внешняя 2-форма Ω, регулярное распределение касательных подпространств D, на котором 2-форма Ω невырождена, непрерывное поле эндоморфизмов Φ касательных подпространств, которое положительно ассоциированно с 2-формой Ω и является обобщением почти комплексной структуры, ассоциированной с невырожденной 2-формой, и симметричная вырожденная 2-форма β, ограничение которой на радикал внешней 2-формы Ω есть риманово скалярное произведение. Твисторные, кэлеровы, почти кэлеровы, контактные и почти контактные структуры являются частными случаями субтвисторной структуры. Отличие субтвисторных структур от классических геометрических структур состоит в том, что она имеет вырожденную фундаментальную 2-форму Ω. Наличие на многообразии субтвисторной или субккэлеровой структуры позволяет рассматривать подмногообразия, касающиеся распределения D, на котором фундаментальная 2-форма Ω невырождена. Такие подмногообразия называются сублежандровыми, по аналогии с лежандровыми подмногообразиями для контактных структур. Сублагранжевым подмногообразием называется сублежандрово подмногообразие, на котором фундаментальная

Работа поддержана президентским грантом по поддержке научных школ № НШ-9740.2016.1

2-форма Ω обращается в 0. Сублагранжевы подмногообразия являются обобщением лагранжевых подмногообразий для внешних 2-форм с нетривиальным радикалом.

Впервые внешние 2-формы с нетривиальным радикалом были изучены в [1] в связи с задачей получения симплектических однородных пространств. Также, вырожденные внешние 2-формы и сублагранжевы подмногообразия часто возникают в различных задачах физики и геометрии. Например, понятие субкэлеровой структуры естественным образом возникает при переносе кэлеровой структуры с базы M расслоения $P \longrightarrow M$ на пространство расслоения P, или при применении формулы Стокса. В физических задачах особенно часто возникают двумерные сублагранжевы подмногообразия, как показано ниже.

Пусть V – векторное поле силы на многообразии M размерности $n \geqslant 3$, а dr – векторное поле бесконечно малого смещения. Пусть $(.,.)$ – скалярное произведение векторных полей на M. Рассмотрим на многообразии M 1-форму $\alpha = (V, dr)$ и замкнутую кривую C, которая является границей двумерной поверхности S. Если внешний дифференциал $d\alpha$ 1-формы α является вырожденной на M внешней 2-формой, то мы можем выделить распределение D, на котором 2-форма $d\alpha$ невырождена. Из формулы Стокса следует, что работа векторного поля V вдоль кривой C определяется по формуле:

$$A_C = \int_C \alpha = \int_S d\alpha.$$

Если поверхность S является сублагранжевым подмногообразием, или касается радикала 2-формы $d\alpha$ во всех своих точках, сразу получаем $A_C = 0$. Если 2-форма $d\alpha$ невырождена на поверхности S, и определено поле эндоморфизмов

$$\varPhi : d\alpha(X,Y) = (\varPhi X, Y), \quad X, Y \in C^1(TM),$$

то для векторных полей $X, Y : \varPhi X = Y$ на поверхности S, получаем, что

$$A_C = \int_S d\alpha(X,Y)dS = \int_S (\varPhi X, \varPhi X)dS > 0.$$

Описанная задача также обуславливает интерес к изучению субтвисторных структур, где вместо внешней 2-формы Ω рассматривается 1-форма α с вырожденным внешним дифференциалом $d\alpha$. Такие структуры называются аффинорными метрическими структурами и изучены в [3] на группах Ли, а в [4] на произвольных векторных расслоениях. В случае размерности 3 аффинорная метрическая структура совпадает с почти контактной метрической структурой. Инвариантные почти контактные метрические структуры на однородных пространствах размерности 3 классифицированы в [2], а инвариантные аффинорные метрические структуры на однородных пространствах размерности 4 классифицированы в [5]. Некоторые важные свойства и примеры субтвисторных и аффинорных метрических структур получены в [6].

В данной работе мы покажем, что субтвисторные структуры и их частные классы обобщают или порождают многие классические геометрические структуры, такие как почти кэлеровы и кэлеровы структуры, почти контактные и контактные структуры, субримановы структуры и структуры почти произведения. В разделе 2 рассматриваются субтвисторные структуры. В разделе 3 рассматривается частный класс субтвисторных структур - субкэлеровы структуры, которые позволяют получать кэлеровы подмногообразия в произвольных вещественных многообразиях. В разделе 3 также доказаны важные геометрические свойства многообразий с субкэлеровыми структурами. Оказывается, что любое многообразие снабженное субкэлеровой структурой локально есть прямое произведения некоторого кэлерова подмногообразия и риманова подмногообразия. В разделах 4 и 5 определяются и изучаются сублежандровы и сублагранжевы подмногообразия. В разделе 6 отдельно рассматривается случай однородных пространств, и приводятся ключевые результаты для получения сублагранжевых однородных подмногообразий в произвольном однородном пространстве. В данной работе активно используются понятия и результаты из серии работ [3-6], в которых рассматривались частные классы субтвисторных структур и некоторые базовые объекты.

§ 2. Субтвисторные структуры

Пусть M – гладкое многообразие размерности $\geqslant 3$. Будем обозначать внутреннее произведение векторного поля X и p-линейной формы η на M через $\mathrm{I}_X\,\eta$.

Определение 2.1. Радикалом билинейной формы Ω в точке x называется векторное подпространство

$$\mathrm{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : \mathrm{I}_v\,\Omega_x = 0\}.$$

Радикалом 1-формы α в точке x называется радикал ее внешнего дифференциала $d\alpha$.

2-форма Ω или 1-форма α называется регулярной, если распределение радикалов $\mathrm{rad}\Omega$ ($\mathrm{rad}\alpha$) имеет постоянный ранг во всех точках из M.

Заметим, что регулярная дифференциальная 2-форма с нулевым радикалом это невырожденная форма, а регулярная 1-форма с радикалом TM есть замкнутая 1-форма на M. Далее, будем обозначать распределение радикалов регулярной формы Ω на M через $\mathrm{rad}\Omega$. Сейчас мы приведем важные свойства радикала регулярных дифференциальных форм.

Теорема 2.2. *Пусть M – гладкое многообразие размерности $n \geqslant 3$, Ω – регулярная ненулевая внешняя 2-форма на M и r – ранг распределения* $\mathrm{rad}\Omega$. *Тогда:*

1) Если n четно, то и r четно, и выполняется неравенство

$$0 \leqslant r \leqslant n-2;$$

2) Если n нечетно, то и r нечетно, и выполняется неравенство

$$1 \leqslant r \leqslant n-2;$$

3) Если 2-форма Ω замкнута, то распределение $\mathrm{rad}\Omega$ *инволютивно.*

Теорема 2.2 также справедлива для незамкнутых регулярных 1-форм. Доказательство пунктов 1 и 2 можно найти в [3], а доказательство пункта 3 можно найти в [6].

Замечание 2.3. Из теоремы 2.2 следует, что для любой регулярной дифференциальной формы Ω с нетривиальным радикалом существует регулярное распределение D касательных подпространств такое, что $TM = D \oplus \mathrm{rad}\Omega$, которое имеет четный ранг при любом n. Такое распределение D называется рабочим расслоением для формы Ω, поскольку Ω всегда невырождена на D.

Определение 2.4. Пусть Ω – регулярная внешняя 2-форма на многообразии M, и D – рабочее расслоение для формы Ω. Аффинором ассоциированным с 2-формой Ω называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ касательных пространств, удовлетворяющее следующим свойствам:

1) $\ker \Phi = \mathrm{rad}\Omega$;
2) $\Phi^2|_D = -\,\mathrm{id}$, где id – поле тождественных линейных операторов;
3) $\Phi^*\Omega = \Omega \circ \Phi = \Omega$;
4) $\Omega(X, \Phi X) \geqslant 0,\ X \in C^1(D)$.

Аналогичным образом определяется аффинор ассоциированный с 1-формой α как аффинор ассоциированный с $d\alpha$. Заметим, что в определении аффинора не требуется, чтобы Φ был изоморфизмом рабочего расслоения D. Сейчас мы покажем, что это свойство следует из свойств аффинора.

Предложение 2.5. *Пусть Φ – аффинор ассоциированный с регулярной 2-формой Ω на M. Тогда Φ есть линейный изоморфизм рабочего расслоения D.*

Доказательство. Будем обозначать через X_D проекцию векторного поля X на распределение D, а через X_R проекцию X на $\mathrm{rad}\Omega$. Поскольку $TM = D \oplus \mathrm{rad}\Omega$, для любого $X \in C^1(D)$ имеем:

$$\Phi X = (\Phi X)_D + (\Phi X)_R.$$

Используя свойства 1 и 2 из определения 2.4, получаем:

$$-X = \Phi^2 X = \Phi(\Phi X)_D.$$

Применяя к последнему равенству аффинор Φ, получаем:

$$\Phi X = (\Phi X)_D \in D.$$

Из предложения 2.5 и определения 2.4 видно, что аффинор Φ есть обобщение понятия почти комплексной структуры ассоциированной с внешней 2-формой Ω, и есть комплексная структура на рабочем расслоении D положительно ассоциированная с ограничением 2-формы Ω на D.

Пусть Ω – вырожденная регулярная 2-форма с рабочим расслоением D. Будем называть метрикой радикала $\mathrm{rad}\Omega$ вырожденную симметричную 2-форму $\beta : \mathrm{rad}\beta = D$, и ограничение формы β на распределение $\mathrm{rad}\Omega$ есть риманово скалярное произведение на $\mathrm{rad}\Omega$.

Определение 2.6. Субтвисторной структурой на многообразии M называется четверка (Ω, D, Φ, β), где Ω – регулярная внешняя 2-форма на M, D – рабочее расслоение для 2-формы Ω, Φ – аффинор ассоциированный с 2-формой Ω и β – метрика радикала $\mathrm{rad}\Omega$. Внешняя 2-форма Ω называется фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры.

В случае, когда фундаментальная 2-форма Ω невырождена, получаем $D = TM$, β есть риманова метрика на M, Φ есть ортогональная относительно этой метрики почти комплексная структура, и (Ω, Φ, β) есть классическая твисторная структура на M. Заметим, что в [6] дано другое определение субтвисторной структуры, где вместо метрики радикала используется глобальная риманова метрика на многообразии M. Сейчас мы покажем, что определение 2.6 эквивалентно этому определению.

Предложение 2.7. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на многообразии M. Тогда:*

1) *На многообразии M существует риманова метрика g такая, что:*

$$\begin{aligned} \Omega(X,Y) &= g(\Phi X, Y),\ X,Y \in C^1(TM), \\ g(\Phi X, \Phi Y) &= g(X,Y),\ X,Y \in C^1(D). \end{aligned} \tag{1}$$

2) *На рабочем расслоении D существует риманово скалярное произведение Ω_Φ такое, что $(\Omega_\Phi, \Phi|_D)$ есть твисторная структура на D.*

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму

$$\Omega_\Phi : \Omega_\Phi(X,Y) = \Omega(X, \Phi Y),\ X,Y \in C^1(TM).$$

Из свойств аффинора в определении 2.4 следует, что $\mathrm{rad}\Omega_\Phi = \mathrm{rad}\Omega$, ограничение формы Ω_Φ на рабочее расслоение D есть положительно-определенное скалярное произведение, и ограничение аффинора Φ на D сохраняет это скалярное произведение. Таким образом, (Ω_Φ, Φ) есть твисторная структура на D. Из определения аффинора и метрики радикала следует, что метрика $g = \Omega_\Phi + \beta$ есть риманова метрика на M и выполняются условия (1).

Если M – риманово многообразие с метрикой g, и Ω – регулярная внешняя 2-форма на M с нетривиальным радикалом, то рабочее расслоение D можно задать как распределение ортогональное $\mathrm{rad}\Omega$ относительно метрики g, метрику радикала β можно задать как

$$\beta(X,Y) = \begin{cases} g(X,Y),\ X,Y \in \mathrm{rad}\Omega, \\ 0,\ X \in D, \\ 0,\ Y \in D, \end{cases}$$

А аффинор Φ полностью определяется условиями (1) из предложения 2.7 (см. [6]). Это дает способ построения субтвисторных структур на римановых многообразиях. Если P есть главное расслоение со структурной группой G размерности r над кэлеровым многообразием M, то на P легко можно получить субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, β). Где Ω есть поднятие фундаментальной 2-формы с M на P, Φ есть поднятие комплексной структуры с M на P, D есть некоторая связность на P, а метрика радикала порождается любой римановой метрикой на группе G. Более подробные примеры этой конструкции можно найти в [6]. В случае, когда рабочее расслоение D есть вполне неголономное распределение на M, из предложения 2.7 следует, что пара (D, Ω_{Φ}) есть субриманова структура на M.

Пусть $e(E)$ – класс Эйлера векторного расслоения E, а $w_1(D)$ – первый класс Штифеля-Уитни векторного расслоения D (см. [7]). В [4] получены следующие необходимые условия существования субтвисторной структуры:

Предложение 2.8. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на многообразии M. Тогда:*

$E(\Lambda^2(M)) = 0$, $w_1(d) = 0$*, где $\Lambda^2(M)$ – расслоение внешних 2-форм на многообразии M.*

Используя этот факт, можно показать, что на четырехмерной сфере не существует субтвисторных структур (см. [6]). Также, в [6] показано, что существуют многообразия, на которых нет твисторной или кэлеровой структуры, но существует субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой.

Помимо субтвисторных структур с фундаментальной 2-формой можно рассматривать так называемые аффинорные метрические структуры (α, D, Φ, β), где α – регулярная незамкнутая 1-форма на многообразии M, а D, Φ, β – рабочее расслоение, аффинор и метрика радикала ассоциированные с внешним дифференциалом 1-формы α. Очевидно, что каждая аффинорная метрическая структура порождает субтвисторную структуру с точной, а значит замкнутой, фундаментальной 2-формой. Однако, субтвисторная структура, у которой фундаментальная 2-форма не является точной, не может порождать аффинорную метрическую структуру. В силу предложения 2.7, аффинорная метрическая структура (α, D, Φ, β) на многообразии M определяет на M риманову метрику $g_\alpha = d\alpha_\Phi + \beta$. По теореме Рисса о линейном функционале в гильбертовом пространстве (см. [8]), на M существует единственное векторное поле $\xi : \alpha = \mathrm{I}_\xi\, g_\alpha$. Это векторное поле называется характеристическим векторным полем аффинорной метрической структуры. Аффинорная метрическая структура называется строгой, если $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$. Различные свойства строгих аффинорных метрических структур изучены в [3] и [4]. Здесь нам потребуется следующее важное свойство:

Предложение 2.9. *Пусть (α, D, Φ, β) – строгая аффинорная метрическая структура на многообразии M. Тогда $D \subseteq \ker\alpha$, и D есть неголономное распределение на M.*

Доказательство. В силу построения метрики g_α получаем, что распределения D и $\mathrm{rad}\alpha$ ортогональны относительно этой метрики. Из теоремы Рисса следует, что характеристическое векторное поле ξ ортогонально $\ker\alpha$. Поскольку $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$ и коразмерность ядра 1-формы всегда равна 1, получаем, что ξ ортогонально D, а следовательно $D \subseteq \ker\alpha$.

В [9] можно найти следующее выражение внешнего дифференциала 1-формы α:

$$2\, d\alpha(X, Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]),\ X, Y \in C^1(TM). \tag{2}$$

Здесь $X(f)$ означает действие векторного поля X на функцию f, $[X,Y]$ есть скобка Ли векторных полей X и Y. Поскольку $D \subseteq \ker\alpha$, для любых $X,Y \in C^1(D)$ равенство (2) принимает вид:

$$2\,d\alpha(X,Y) = -\alpha([X,Y]).$$

Поскольку 1-форма α незамкнута, распределение D не может быть инволютивным. По теореме Фробениуса получаем, что распределение D неголономно.

Этот результат позволяет с помощью строгих аффинорных метрических структур получить пример субтвисторных структур с точной фундаментальной 2-формой и неинволютивным рабочим расслоением. Для контактных метрических структур рабочее расслоение является вполне неголономным. Заметим, что контактная метрическая структура есть строгая аффинорная метрическая структурас радикалом ранга 1, а почти кэлерова или кэлерова структура есть субтвисторная структура с радикалом ранга 0.

Пусть $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ – аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем ξ, $\mathrm{L}_X\,\alpha$ – производная Ли 1-формы α вдоль векторного поля X, а $|X|^2 = g_\alpha(X,X)$. Введем тензорное поле $\tau_\alpha = \mathrm{L}_\xi\,\alpha - d|\xi|^2$. Будем называть этот тензор тензором расхождения.

Теорема 2.10. *Аффинорная метрическая структура* $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ *с характеристическим векторным полем* ξ *является строгой тогда и только тогда, когда ее тензор расхождения* $\tau_\alpha = 0$.

Доказательство. В [9] можно найти следующее выражение производной Ли дифференциальной формы α вдоль векторного поля X:

$$\mathrm{L}_X\,\alpha = \mathrm{I}_X\,d\alpha + d\,\mathrm{I}_X\,\alpha.$$

Из определения характеристического векторного поля ξ следует, что

$$\alpha(\xi) = g_\alpha(\xi,\xi) = |\xi|^2.$$

Отсюда получаем:

$$\mathrm{I}_\xi\,d\alpha = \mathrm{L}_\xi\,\alpha - d|\xi|^2 = \tau_\alpha.$$

Таким образом, условие $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$ эквивалентно условию $\tau_\alpha = 0$.

Следствие 2.11. *Аффинорная метрическая структура* $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ *с характеристическим векторным полем* $\xi : |\xi| = \mathrm{const}$ *является строгой тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L}_\xi\,\alpha = 0$.

В [6] доказано, что субтвисторная структура с точной фундаментальной 2-формой на компактном многообразии не может иметь инволютивное рабочее расслоение. Однако, существует специальный класс субтвисторных структур с инволютивным рабочим расслоением, который мы рассмотрим далее.

§ 3. Субкэлеровы структуры

Пусть M – вещественное многообразие размерности $\geqslant 3$ и $(\Omega, D, \varPhi, \beta)$ – субтвисторная структура на M с инволютивным рабочим расслоением D. По теореме Фробениуса через каждую точку из M проходит интегральное подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Из определения аффинора Φ следует, что ограничение Φ на Q есть почти комплексная структура на подмногообразии Q. В случае, когда эта почти комплексная структура интегрируема, а фундаментальная 2-форма замкнута, подмногообразие Q есть кэлерово подмногообразие в M. Это приводит к понятию субкэлеровой структуры.

Определение 3.1. Субкэлеровой структурой на многообразии M называется набор объектов $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$, где Ω – замкнутая регулярная внешняя 2-форма на M, D – рабочее расслоение для Ω, Φ – аффинор ассоциированный с 2-формой Ω, β – метрика радикала $\mathrm{rad}\Omega$ и Q – подмногообразие в $M : TQ = D|_Q$, и $\Phi|_Q$ есть комплексная структура на Q.

Из определения следует, что рабочее расслоение D есть инволютивное распределение на подмногообразии Q. В [6] показано, что рабочее расслоение субкэлеровой структуры является инволютивным распределением на всем многообразии M. Также из определения вытекает, что наличие на вещественном многообразии M субкэлеровой структуры влечет существование в M кэлерова подмногообразия. Из предложения 2.9 следует, что строгая аффинорная метрическая структура не может порождать субкэлерову структуру. Пример нестрогой аффинорной метрической структуры, которая порождает субкэлерову структуру можно найти в [6]. Помимо этого, существует целый класс субтвисторных структур, которые порождают субкэлерову структуру. Чтобы определить этот класс, нам потребуется понятие тензора кручения субтвисторной структуры.

Определение 3.2. Тензором кручения субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на многообразии M называется тензорное поле N на M:

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y],$$

$$X, Y \in C^1(TM).$$

Из определения 3.2 и определения 2.4 следует, что для любого интегрального подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$ ограничение тензора кручения N на Q есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры $\Phi|_Q$. Интегрируемость этой почти комплексной структуры на Q эквивалентна условию $N|_Q = 0$ (см. [9, глава 9]).

Теорема 3.3. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на многообразии M размерности $\geqslant 3$ с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω и нулевым тензором кручения N. Тогда любое интегральное подмногообразие Q для рабочего расслоения D есть кэлерово подмногообразие, и $(Q, \Omega, D, \Phi, \beta)$ есть субкэлерова структура на M.*

Доказательство. Будем обозначать проекцию векторного поля X на распределение $\mathrm{rad}\Omega$ через X_R. Из предложения 2.5 следует, что $\Phi(TM) = D$. Если $X, Y \in C^1(D)$, то из определения 3.2 получаем:

$$N_R(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y]_R.$$

Условие $N = 0$ влечет $N_R = 0$, откуда $[\varPhi X, \varPhi Y]_R = 0$. Поскольку $\varPhi$ есть линейный изоморфизм рабочего расслоения D, получаем, что распределение D инволютивно. По теореме Фробениуса инволютивное распределение вполне голономно, а следовательно, через каждую точку $x \in M$ проходит подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Ограничение аффинора $\varPhi$ на любое такое подмногообразие есть почти комплексная структура на Q, и ограничение тензора кручения N на Q есть ее тензор Нейенхейса. Условие $N = 0$ влечет, что $\varPhi$ есть комплексная структура на Q и Q есть кэлерово подмногообразие. Таким образом, выполнено определение 3.1, и теорема доказана.

В силу пункта 3 теоремы 2.2, субкэлерова структура на многообразии M всегда задает разложение касательного расслоения в сумму Уитни двух инволютивных распределений $TM = D \oplus \mathrm{rad}\Omega$. С этим разложением можно связать структуру почти произведения $\psi : \Psi|_D = \varPhi^2|_D = -\,\mathrm{id}$, $\psi|_{\mathrm{rad}\Omega} = \mathrm{id}$, где id – поле тождественных линейных операторов на M. Для структуры почти произведения ψ определен тензор P_ψ:

$$P_\psi(X, Y) = [X, Y] - \psi[\psi X, Y] + \psi[X, \psi Y] - [\psi X, \psi Y],$$

$$X, Y \in C^1(TM).$$

Будем называть тензор P_ψ тензором индуцированного кручения субкэлеровой структуры. Условие $P_\psi = 0$ эквивалентно тому, что многообразие M локально диффеоморфно прямому произведению подмногообразий $Q : TQ = D|_Q$ и $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$. Заметим, что скалярное произведение $\Omega_\varPhi$ на рабочем расслоении D из предложения 2.7 есть кэлерова метрика на Q, метрика радикала β есть риманова метрика на R, а метрика $g_\Omega = \Omega_\varPhi + \beta$ есть метрика прямого произведения на M. Таким образом, получаем:

Предложение 3.4. *Если вещественное многообразие M допускает субкэлерову структуру с радикалом ранга $r \geqslant 1$ и нулевым тензором индуцированного кручения, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия Q коразмерности r и риманова подмногообразия R размерности r.*

Поскольку индуцированную структуру почти произведения можно построить и для произвольной субтвисторной структуры, из теоремы 3.3 получаем:

Следствие 3.5. *Если вещественное многообразие M допускает субтвисторную структуру с радикалом ранга $r \geqslant 1$, замкнутой фундаментальной 2-формой, нулевым тензором кручения и нулевым тензором индуцированного кручения, то M локально изометрично прямому произведению кэлерова подмногообразия Q и риманова подмногообразия R размерности r.*

Пусть $(\Omega, D, \varPhi, \beta)$ – субтвисторная структура на многообразии M, $g_\Omega = \Omega_\varPhi + \beta$ – риманова метрика на M, и ∇ – связность Леви-Чивита метрики g_Ω. Обозначим через ∇^D ограничение связности ∇ на рабочее расслоение D. Для субтвисторной структуры с инволютивным рабочим расслоением, в частности, для субкэлеровой структуры, ∇^D есть связность Леви-Чивита метрики $\Omega_\varPhi$ на любом интегральном подмногообразии для распределения D.

Теорема 3.6. *Пусть* $(\Omega, D, \varPhi, \beta)$ *– субтвисторная структура на многообразии* M *размерности* $\geqslant 3$, *и* P_ψ *– тензор индуцированного кручения этой субтвисторной структуры. Если* $\nabla^D \varPhi = 0$ *и* $P_\psi = 0$, *то в* M *существует кэлерово подмногообразие* Q *и риманово подмногообразие* R *такие, что* M *локально изометрично* $Q \times R$, *и* $(Q, \Omega, D, \varPhi, \beta)$ *есть субкэлерова структура на* M.

Доказательство. Из условия $P_\psi = 0$ следует, что распределения D и $\mathrm{rad}\Omega$ инволютивны, в M существуют римановы подмногообразия $Q : TQ = D|_Q$, $R : TR = \mathrm{rad}\Omega|_R$, и M локально изометрично $Q \times R$. Условие $\nabla^D \varPhi = 0$ влечет, что $\varPhi$ есть комплексная структура на Q и $d\Omega|_Q = 0$ (см. [9, глава 9]). Поскольку $TQ = D|_Q$ и регулярная 2-форма Ω может принимать ненулевые значения только на рабочем расслоении D, получаем $d\Omega = 0$ на M. Таким образом, выполнены все условия определения субкэлеровой структуры, и Q есть кэлерово подмногообразие.

Замечание 3.7. Очевидно, что теорема 3.6 остается справедливой, если условие $\nabla^D \varPhi = 0$ заменить на условие $\nabla \varPhi = 0$. При этом, ограничение $\nabla \varPhi$ на $\mathrm{rad}\Omega$ всегда равно 0, когда $\mathrm{rad}\Omega$ есть инволютивное распределение.

Замечание 3.8. Важным геометрическим результатом этого раздела является тот факт, что наличие на многообразии M произвольной размерности $\geqslant 3$ субкэлеровой структуры с нулевым тензором индуцированного кручения позволяет рассматривать M как расслоение над кэлеровым многообразием с римановыми слоями.

§ 4. Сублежандровы подмногообразия

Пусть $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ – аффинорная метрическая структура на гладком многообразии M размерности $\geqslant 3$. Подмногообразие Q в M называется сублежандровым, если $TQ = D|_Q$. Из теоремы Фробениуса следует, что если D есть инволютивное распределение на M, в M всегда существуют сублежандровы подмногообразия, размерность которых совпадает с рангом рабочего расслоения D. Примеры аффинорных метрических структур с инволютивным рабочим расслоением можно найти в [5] и [6]. Поскольку аффинорная метрическая структура порождает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой, из предложения 3.4 получаем:

Следствие 4.1. *Пусть* $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ *– нестрогая аффинорная метрическая структура на многообразии* M *размерности* $n \geqslant 3$ *с радикалом ранга* $r \geqslant 1$. *Если тензор индуцированного кручения соответствующей субтвисторной структуры равен нулю, то в* M *существуют сублежандрово подмногообразие* Q *коразмерности* r *и риманово подмногообразие* R *размерности* r *такие, что* M *локально изометрично* $Q \times R$.

В силу предложения 2.9, строгая аффинорная метрическая структура имеет неинволютивное рабочее расслоение. Это условие дает следующее ограничение на максимальную размерность сублежандровых подмногообразий:

Предложение 4.2. *Пусть (α, D, Φ, β) – строгая аффинорная метрическая структура с радикалом ранга $r \geqslant 1$ на многообразии M размерности $n \geqslant 3$. Тогда размерность любого сублежандрова подмногообразия в M не превышает $\frac{n-r}{2}$.*

Доказательство. Согласно замечанию 2.3, рабочее расслоение D имеет четный ранг при любом n. Если в M существует сублежандрово подмногообразие Q размерности k, то по предложению 2.9, $TQ \subset D|_Q \subseteq \ker\alpha|_Q$. Используя равенство (2) из раздела 2, для любых $X, Y \in C^1(TQ)$ получаем:

$$2\, g(\Phi X, Y) = 2\, d\alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y]) = 0,$$

где g – риманова метрика на M из предложения 2.7. Поскольку Φ есть линейный изоморфизм на D, $\operatorname{rank}(\Phi(TQ)) = \operatorname{rank}(TQ) = k$. Отсюда:

$$2k = \operatorname{rank}(\Phi(TQ) \oplus TQ) \leqslant \operatorname{rank}(D) = n - r.$$

Теорема 4.3. *Пусть Q – сублежандрово подмногообразие для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, β) на многообразии M размерности $n \geqslant 3$. Если ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q, то Q есть кэлерово подмногообразие в M, и ограничение этой аффинорной метрической структуры на Q порождает кэлерову структуру на Q.*

Доказательство. Поскольку Q есть комплексное подмногообразие, его вещественная размерность равна $2k \leqslant \operatorname{rank}(D)$. Ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура положительно ассоциированная с замкнутой 2-формой $d\alpha$. Покажем, что 2-форма $d\alpha$ невырождена на Q. Для любой точки $x \in Q$ существует координатная окрестность U, в которой можно построить локальные базисные векторные поля $e_1, \ldots, e_{2k} : \Phi e_l = e_{k+l}$, $\Phi e_{k+l} = -e_l$ для любого $l \leqslant k$ (см. [9, глава 9]). Рассмотрим локальные двумерные распределения V_l натянутые на базисные векторные поля e_l, e_{k+l}, $l \leqslant k$. Очевидно, что $\Phi(V_l) = V_l$ для всех l. Для любого l имеем:

$$d\alpha(e_l, e_{k+l}) = d\alpha(e_l, \Phi e_l) = g(e_l, e_l) > 0,$$

где g – риманова метрика на M из предложения 2.7. Для любой точки $y \in U$ имеет место разложение

$$T_y Q = V_1(y) + \cdots + V_k(y).$$

Отсюда следует, что 2-форма $d\alpha$ невырождена в каждой точке $y \in U$, в частности, при $y = x$. Таким образом получаем, что замкнутая 2-форма $d\alpha$ невырождена в любой точке $x \in Q$, и ограничение $(d\alpha, \Phi, d\alpha_\Phi)$ на Q есть кэлерова структура на Q.

Пример сублежандрова подмногообразия, на котором кэлерову структуру нельзя получить как ограничение субтвисторной структуры порожденной аффинорной метрической структурой, предоставляет следующий результат:

Предложение 4.4. *Пусть Q – компактное сублежандрово подмногообразие без края размерности $2k$ для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, β). Тогда замкнутая 2-форма $d\alpha$ вырождена на Q.*

Доказательство. Предположим, что 2-форма $d\alpha$ невырождена на Q. Тогда внешняя форма $d\alpha^k$ порождает группу когомологий $H^{2k}(Q,\ \mathbf{z}) \cong \mathbf{z}$. Обозначим через θ внешнюю форму $\alpha \wedge d\alpha^{k-1}$. Тогда $d\theta = d\alpha^k$. Получаем, что $H^{2k}(Q,\ \mathbf{z}) = 0$, что противоречит условию $H^{2k}(Q,\ \mathbf{z}) \cong \mathbf{z}$.

Особый интерес представляют сублежандровы кривые. Сублежандровым узлом называется замкнутая кривая, касающаяся рабочего расслоения D во всех своих точках. Из предложения 2.9 получаем:

Следствие 4.5. *Пусть C – сублежандров узел для строгой аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, β) на многообразии M. Тогда кривая C касается распределения $\ker\alpha$ во всех своих точках, и является решением дифференциального уравнения $\alpha(\dot C(t)) = 0$.*

Для классических контактных структур широко изучаются геометрические и топологические свойства лежандровых узлов. Следствие 4.5 позволяет перенести эту теорию на сублежандровы узлы для строгих аффинорных метрических структур. Однако, в случае, когда $\mathrm{rank}(\mathrm{rad}\alpha) \geqslant 2$, на многообразии M могут существовать замкнутые кривые, которые касаются $\ker\alpha$ во всех своих точках, но не являются сублежандровыми узлами. В частности, когда на M существует замкнутая кривая $C : [0,1] \longrightarrow M : \alpha(\dot C(t)) = 0$, и векторное поле $\dot C(t)$ ортогонально рабочему расслоению D относительно римановой метрики на M из предложения 2.7. Для римановых многообразий с замкнутыми геодезическими можно получить результат обратный следствию 4.5.

Предложение 4.6. *Пусть (α, D, Φ, β) – аффинорная метрическая структура на многообразии M размерности $\geqslant 3$. Если все геодезические на M относительно римановой метрики $g = d\alpha_\Phi + \beta$ замкнуты, и любой сублежандров узел для этой структуры касается распределения $\ker\alpha$ во всех своих точках, то эта аффинорная метрическая структура является строгой.*

Доказательство. Пусть ξ – характеристическое векторное поле для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, β), и ξ' его проекция на рабочее расслоение D. Выберем в M произвольную точку $x : \alpha(\xi(x)) \neq 0$. Пусть $C(t) : [0,1] \longrightarrow M : C(0) = x,\ \dot C(0) = \xi'(x)$ – геодезическая относительно метрики g. Поскольку все такие геодезические замкнуты, C есть сублежандров узел в M. Но, так как все сублежандровы узлы касаются распределения $\ker\alpha$ во всех своих точках, $g_x(\xi', \xi') = \alpha(\xi'(x)) = \alpha(\dot C(0)) = 0$. Получаем, что $\xi' = 0$ и $\xi \in \mathrm{rad}\alpha$.

Замечание 4.7. Если в предложении 4.6 вместо сублежандровых узлов рассматривать произвольные сублежандровы кривые, то условие замкнутости геодезических можно убрать, так как оно необходимо только для замкнутости сублежандровых кривых. Для произвольных сублежандровых кривых следствие 4.5 становится критерием строгости аффинорной метрической структуры.

Сублежандровы кривые имеют важное значение в теории пространств Карно-Каратеодори и в теории однородных линейных дифференциальных уравнений. Из результатов этого раздела в частности видно, как могут быть устроены и какую размерность могут иметь пространства решений дифференциального уравнения $\alpha(\dot{C}(t)) = 0$, когда α есть регулярная 1-форма с вырожденным внешним дифференциалом.

§ 5. Сублагранжевы подмногообразия

В теории интегрируемых гамельтоновых систем важную роль играют лагранжевы подмногообразия. В этом разделе мы обобщим понятие лагранжева подмногообразия для многообразий произвольной размерности с вырожденной замкнутой 2-формой.

Пусть M – гладкое многообразие размерности $\geqslant 5$, и $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – субтвисторная структура на M. При ограничении фундаментальной 2-формы Ω на любую кривую $C \subset M$, $\Omega|_C = 0$.

Определение 5.1. Сублагранжевым подмногообразием называется подмногообразие Q максимально возможной размерности $\geqslant 2$ в M такое, что Q касается рабочего расслоения D во всех своих точках, и $\Omega|_Q = 0$.

Из определения следует, что многообразие M может содержать сублагранжево подмногообразие только когда $\mathrm{rank}(D) \geqslant 4$, и $\dim(M) \geqslant 5$. Будем обозначать риманову метрику на M из предложения 2.7 через $g_\Omega = \Omega_\Phi + \beta$, где Ω_Φ – риманово скалярное произведение на рабочем расслоении из предложения 2.7.

Предложение 5.2. *Пусть Q – сублагранжево подмногообразие для субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) с радикалом ранга $r \geqslant 1$ на многообразии M размерности $n \geqslant 5$. Тогда $\dim(Q) \leqslant \frac{n-r}{2}$.*

Доказательство. Используя равенства (1) в предложении 2.7, для любых $X, Y \in C^1(TQ)$ имеем:

$$g_\Omega(\Phi X, Y) = \Omega(X, Y) = 0.$$

Далее, рассуждая как в доказательстве предложения 4.2, получаем $\dim(Q) \leqslant \frac{n-r}{2}$.

Из предложения 2.9 и предложения 4.2 получаем:

Следствие 5.3. *Сублежандрово подмногообразие максимальной размерности $\geqslant 2$ для строгой аффинорной метрической структуры на многообразии M размерности $\geqslant 5$ есть сублагранжево подмногообразие для соответствующей субтвисторной структуры на M.*

Очевидно, что сублагранжево подмногообразие для субтвисторной структуры с точной фундаментальной 2-формой будет сублежандровым подмногообразием для соответствующей аффинорной метрической структуры. Однако, как следует из теоремы 4.3, сублежандрово комплексное подмногообразие, для аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, β), комплексная структура на котором есть ограничение аффинора Φ, не содержится в каком-либо сублагранжевом подмногообразии для субтвисторной структуры $(d\alpha, D, \Phi, \beta)$. Поскольку на многообразии с нулевой группой когомологий $H^2(M, \mathbb{R})$ любая замкнутая внешняя 2-форма является точной, получаем:

Предложение 5.4. *Пусть M – гладкое многообразие размерности $\geqslant 5$ и $H^2(M, \mathbb{R}) = 0$. Тогда сублагранжево подмногообразие для любой субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω на M есть сублежандрово подмногообразие максимальной размерности для соответствующей аффинорной метрической структуры, которое касается распределения* $\ker\alpha : d\alpha = \Omega$.

По теореме Пуанкаре любая замкнутая внешняя форма на стягиваемом многообразии является точной. С учетом предложения 5.4 получаем, что сублагранжевы подмногообразия для субтвисторных структур на стягиваемых многообразиях можно искать как максимальные подмногообразия, касающиеся распределения $D \cap \ker\alpha$ для соответствующей аффинорной метрической структуры (α, D, Φ, β).

Для многообразия, на котором существует глобальный базис рабочего расслоения сублагранжево подмногообразие можно получить как пересечение специальных подмногообразий. Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на многообразии M, и X_k, X_l – линейно независимые в каждой точке из M векторные поля в D. Обозначим через Q_{kl} подмногообразие, касающееся векторных полей X_k, X_l такое, что функция $\Omega(X_k, X_l) = 0$ на этом подмногообразии. Подмногообразие Q_{kl} может быть пустым.

Предложение 5.5. *Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – субтвисторная структура на многообразии M размерности $\geqslant 5$. Если на M существует глобальный базис $X_1, \dots, X_{2m}$, $2m = \mathrm{rank}(D)$, то подмногообразие $\bigcap_{k<l} Q_{kl}$ есть сублагранжево подмногообразие для этой субтвисторной структуры.*

Доказательство. Обозначим через P множество всех упорядоченных пар индексов $\{(k,l) : k < l \leqslant 2m : Q_{kl} \neq \emptyset\}$. Для любой пары индексов $(k,l) \in P$ имеем $\Omega(X_k, X_l) = 0$ на подмногообразии Q_{kl}. Отсюда $\Omega = 0$ на подмногообразии $Q = \bigcap_{(k,l)\in P} Q_{kl}$.

Предположим, что в M существует подмногообразие $S \supset Q : TS \subset D|_S$, $\Omega|_S = 0$, и $\dim(S) > \dim(Q)$. Тогда существует индекс k' и трансверсальная подмногообразию Q кривая $C(t) \in S : \dot{C}(t) = X_{k'}(C(t))$. Для любого векторного поля X_L, касающегося подмногообразия Q имеем $\Omega(X_{k'}, X_l) = 0$ на подмногообразии S, и $S = Q_{k'l}$. Это означает, что существует пара индексов $(k', l) \notin P : Q_{k'l} \neq \emptyset$, что противоречит максимальному выбору множества P. Получаем, что $S = Q$ и Q есть сублагранжево подмногообразие в M.

Предложение 5.5 позволяет свести задачу нахождения сублагранжева подмногообразия к решению системы не более чем из $m(2m-1)$ уравнений, где $2m$ – ранг рабочего расслоения. Оценить число таких уравнений, или получить оценку снизу на размерность сублагранжева подмногообразия позволяет следующий результат:

Предложение 5.6. *Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – субтвисторная структура с рабочим расслоением ранга $2m$ на многообразии M размерности $\geqslant 5$. Если в D существует инволютивное распределение $E : g_\Omega(\Phi E, E) = 0$ ранга $k \geqslant 2$, то в M существует сублагранжево подмногообразие размерности не меньше k и не больше m.*

Доказательство. Из определения римановой метрики g_Ω (см. предложение 2.7) следует, что для любых $X, Y \in C^1(E)$

$$\Omega(X,Y) = g_\Omega(\Phi X, Y) = 0.$$

Поскольку распределение E инволютивно, по теореме Фробениуса через каждую точку $x \in M$ проходит интегральное подмногообразие $Q : TQ = E|_Q$ и $\Omega|_Q = 0$. Получаем, что в M существует сублагранжево подмногообразие как минимум размерности k. Из предложения 5.2 следует, что размерность этого сублагранжева подмногообразия не может быть больше m.

Следствие 5.7. *Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – субтвисторная структура с рабочим расслоением ранга $2m$ на многообразии M размерности $\geqslant 5$. Если максимальное инволютивное распределение $E \subset D : g_\Omega(\Phi E, E) = 0$ имеет ранг $\geqslant 2$, то максимальное интегральное подмногообразие для распределения E есть сублагранжево подмногообразие в M.*

Сейчас мы приведем пример многообразия, в котором имеются сублагранжевы подмногообразия максимально возможной размерности.

Рассмотрим комплексное проективное пространство $\mathbb{C}p^n$. На $\mathbb{C}p^n$ существует кэлерова структура (Ω_0, J_0, h_0), где h_0 – метрика Фубини-Штуди, J_0 стандартная комплексная структура, индуцированная умножением на мнимую единицу, и Ω – невырожденная замкнутая фундаментальная 2-форма, имеющая в однородных координатах $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ вид:

$$\Omega_0(Z,Z) = -\overline{\Omega}_0(Z,Z) = 2i \sum_{i<j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} \ln(|Z|^2) dz_i dz_j.$$

Пусть P – расслоение комплексных ортогональных реперов на $\mathbb{C}p^n$ относительно метрики h_0. На расслоении D существует единственная эрмитова связность без кручения (см. [9]). Слои главного расслоения P изоморфны группе $\mathrm{U}(n)$ и допускают эрмитову метрику g_0. Дифференциал проекции $\pi : P \longrightarrow \mathbb{C}p^n$ позволяет поднять кэлерову структуру (Ω_0, J_0, h_0) до субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на P с радикалом вещественного ранга n^2. Здесь $\beta = h_0 \circ d\pi + g_0$, $\Phi|_D = d\pi^{-1} \circ J_0 \circ d\pi$, $\Omega = \Omega_0 \circ d\pi$, D – эрмитова связность без кручения на P. Рассмотрим в $\mathbb{C}p^n$ подмногообразие $Q = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \mathrm{Im} z_k = 0, k = 0, 1, \ldots, n\}$. Поскольку $\Omega_0|_Q = 0$, Q есть лагранжево подмногообразие максимально возможной размерностив $\mathbb{C}p^n$. Получаем, что множество всех вещественных горизонтальных реперов на $\mathbb{C}p^n$ есть сублагранжево подмногообразие в P максимально возможной размерности. Заметим, что вещественная размерность многообразия P равна $n(n+2)$. При нечетном n получаем, что P не допускает классических лагранжевых подмногообразий, но допускает сублагранжевы подмногообразия.

Широкий класс субтвисторных структур и сублагранжевых подмногообразий можно получить для однородных пространств.

§ 6. Случай однородных пространств

Пусть $M = G/H$ – однородное риманово пространство, размерности $\geqslant 3$, где G – группа изометрий многообразия M, транзитивно и эффективно действующая на M, H – подгруппа изотропии некоторого начального элемента o. Билинейная форма Ω на M называется G-инвариантной, если для любой изометрии $g \in G$ $(dg)^*\Omega = \Omega \circ dg = \Omega$, здесь dg обозначает дифференциал отображения g. Алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G можно разложить в прямую сумму подалгебры изотропии $\mathfrak{h}$ и некоторого дополнительного подпространства $\mathfrak{p}$ касательного пространства T_eG, где e – единица группы G. Будем говорить, что аффинор $\varPhi$ ассоциированный с внешней 2-формой Ω является G-инвариантным, если для любой изометрии $g \in G$ $\varPhi \circ dg = dg \circ \varPhi$. Субтвисторная структура на однородном пространстве называется G-инвариантной, если все, образующие эту структуру, элементы G-инвариантны. В [5] показано, что любая 1-форма или 2-форма на однородном пространстве регулярна, и ее рабочее расслоение инвариантно относительно действия отображений dg для всех $g \in G$. Левоинвариантная билинейная форма Ω на группе Ли G называется изотропновырожденной, если $\mathrm{rad}\Omega \supseteq \mathfrak{h}$. Поскольку любая G-левоинвариантная и H-правоинвариантная билинейная форма Ω' на группе Ли G порождает G-инвариантную билинейную форму Ω на $M = G/H$ (см. [10]), а любую G-инвариантную билинейную форму на однородном пространстве M можно единственным образом поднять до изотропновырожденной G-инвариантной и H-правоинвариантной билинейной формы на группе G, получаем:

Предложение 6.1. *Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $\geqslant 3$. Тогда:*

1) *Если подгруппа изотропии H связна, то множество всех G-инвариантных субтвисторных структур на M находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством всех изотропновырожденных G-левоинвариантных и H- правоинвариантных субтвисторных структур на группе G;*
2) *Если подгруппа изотропии H дискретна, то множество всех G-инвариантных субтвисторных структур на M находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством всех изотропновырожденных левоинвариантных субтвисторных структур на группе G.*

Аналогичный факт имеет место для G-инвариантных аффинорных метрических структур (см. [5]). Классификация строгих инвариантных аффинорных метрических структур на трехмерных однородных пространствах получена в [2], а классификация инвариантных аффинорных метрических структур на четырехмерных однородных пространствах получена в [5].

Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство, и $\chi(M)$ – эйлерова характеристика многообразия M. В [5] доказано, что если на M существует G-инвариантная аффинорная метрическая структура, то $\chi(M) = 0$. Отсюда получаем:

Предложение 6.2. *Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство размерности $2n \geqslant 4$, и $\chi(M) > 0$. Тогда на M не существует G-инвариантных субтвисторных структур с точной фундаментальной 2-формой.*

Из пункта 3 теоремы 2.2 следует, что радикал левоинвариантной замкнутой внешней 2-формы на группе Ли G есть подалгебра Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Подгруппа порожденная этой подалгеброй Ли называется подгруппой радикала. В [3] доказано, что подгруппа радикала левоинвариантной 2-формы Ω связна и совпадает с компонентой связности единицы подгруппы изотропии коприсоединенного действия группы G на 2-форму Ω. Важным приложением субтвисторных структур и аффинорных метрических структур является получение однородных пространств с инвариантной кэлеровой структурой.

Теорема 6.3. *Пусть G – группа Ли размерности $\geqslant 3$, $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – G-левоинвариантная и R-правоинвариантная субтвисторная структура на группе G, где R – подгруппа радикала фундаментальной 2-формы Ω, и N – тензор кручения этой субтвисторной структуры. Тогда:*

1) *На однородном пространстве G/R существует G-инвариантная почти кэлерова структура;*
2) *Если $N = 0$, то на однородном пространстве G/R существует G-инвариантная кэлерова структура, и в G существует подгрупа Q с левоинвариантной кэлеровой структурой такая, что группа G локально изоморфна полупрямому произведению $R \rtimes Q$.*

Доказательство. Пункт 1 сразу следует из предложения 6.1. Обозначим через X_R проекцию векторного поля X на подалгебру $\mathrm{rad}\Omega$. Из определения тензора кручения N (см. определение 3.2) и условия $N = 0$ для любых $X, Y \in C^1(D)$ получаем:

$$N_R(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y]_R = 0.$$

Поскольку аффинор Φ есть линейный изоморфизм рабочего расслоения D получаем, что D есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим в G подгруппу $Q = \exp(D)$. По теореме 4.3 ограничение субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) на подгруппу Q есть Q-левоинвариантная и R-правоинвариантная кэлерова структура на Q. По предложению 6.1 субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на группе G порождает G-инвариантную твисторную структуру $(\Omega', D', \Phi', \beta')$ с тензором кручения N' на однородном пространстве G/R. Пусть π – естественная проекция G на G/R, тогда $N' = N \circ d\pi|_D = 0$. По теореме 4.3 получаем, что (Ω', Φ', β') есть G-инвариантная кэлерова структура на G/R.

Поскольку все компоненты субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) R-биинвариантны, метрика $g = \Omega_\Phi + \beta$, где Ω_Φ – риманово скалярное произведение на D из предложения 2.7, есть R-биинвариантная риманова метрика на группе Ли G. Поскольку подалгебра D есть ортогональное дополнение к подалгебре $\mathrm{rad}\Omega = \mathfrak{r}$ относительно R-биинвариантной метрики g, подалгебра D инвариантна относительно присоединенного действия подгруппы R (см. [3]). Отсюда следует, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ есть полупрямое произведение подалгебр $\mathfrak{r} \rtimes D$. Это влечет локальный изоморфизм групп G и $R \rtimes Q$. Таким образом доказан пункт 2.

Будем обозначать через $b_1(G)$ первое число Бетти группы Ли G. На группе Ли любая незамкнутая левоинвариантная 1-форма порождает элемент группы когомологий $H^1(G, \mathbf{z})$.

Предложение 6.4. *Пусть G – связная компактная группа Ли размерности $\geqslant 3$, и $b_1(G) > 0$. Тогда любая левоинвариантная 1-форма с нетривиальным радикалом на группе G порождает однородное пространство M_α с G-инвариантной кэлеровой структурой.*

Доказательство. Пусть α – левоинвариантная 1-форма на группе G с нетривиальным радикалом. Обозначим через R подгруппу радикала 1-формы α, а через ρ обозначим биинвариантную риманову метрику на группе G. Такая метрика всегда существует на связной компактной группе Ли (см. [10]). Поскольку группа G связна, подгруппа радикала R есть подгруппа изотропии коприсоединенного действия группы G на 1-форму α (см. [3]). Получаем, что однородное пространство G/R есть орбита 1-формы α относительно коприсоединенного действия группы G. В [10, глава 8] доказано, что для любого элемента $Y \in \mathfrak{g}$ его орбита относительно присоединенного действия группы G допускает G-инвариантную кэлерову структуру. Поскольку метрика ρ устанавливает изоморфизм между $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$, получаем, что на однородном пространстве G/R существует G-инвариантная кэлерова структура.

Поскольку для полупростой группы G размерности n $b_1(G) = n$, получаем:

Следствие 6.5. *Любая G-левоинвариантная и R-правоинвариантная аффинорная метрическая структура с нетривиальной подгруппой радикала R на полупростой связной группе Ли G порождает G-инвариантную кэлерову структуру на однородном пространстве G/R.*

Пусть $(\alpha', D', \varPhi'\beta')$ – G-инвариантная аффинорная метрическая структура на однородном пространстве $M = G/H$, а $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ – соответствующая этой структуре левоинвариантная аффинорная метрическая структура на группе Ли G. Пусть $\rho = d\alpha_\varPhi + \beta$ – G-левоинвариантная и H-правоинвариантная риманова метрика из предложения 2.7 на группе G. Тогда ортогональное дополнение $\mathfrak{p}$ к подалгебре изотропии $\mathfrak{h}$ относительно метрики ρ содержит рабочее расслоение D и инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы изотропии H (см. [5]). Подмногообразие M' в M однородно тогда и только тогда, когда в G существует подгруппа Q, действующая на M'. Если M' касается D' во всех своих точках, то подалгебра $\mathfrak{q} \subseteq D$. Поскольку характеристическое векторное поле G-инвариантной аффинорной метрической структуры всегда имеет постоянную длину, в силу следствия 2.11 получаем, что тензор расхождения совпадает с производной Ли $\mathrm{L}_\xi\,\alpha$. Из теоремы 2.10 и следствия 5.3 получаем:

Теорема 6.6. *Пусть $M = G/H$ – однородное пространство размерности $\geqslant 5$ с начальной точкой o, $(\alpha, D, \varPhi, \beta)$ – G-инвариантная аффинорная метрическая структура с характеристическим векторным полем ξ на M, и D_G – рабочее расслоение соответствующей G-левоинвариантной H-правоинвариантной аффинорной метрической структуры на группе Ли G. Тогда:*

1) *M есть естественно-редуктивное однородное пространство;*
2) *Множество всех сублежандровых однородных подмногообразий в M находится во взаимнооднозначном соответствии со множеством всех подалгебр Ли в D_G;*

3) Если $\mathrm{L}_\xi\,\alpha = 0$*, то через точку* o *в* M *проходит однородное сублагранжево подмногообразие для соответствующей субтвисторной структуры с фундаментальной 2-формой* $d\alpha$ *тогда и только тогда, когда в* D_G *существует максимальная подалгебра размерности* $\geqslant 2$*;*

4) Если $\mathrm{L}_\xi\,\alpha \neq 0$*, то через точку* o *в* M *проходит однородное сублагранжево подмногообразие для соответствующей субтвисторной структуры с фундаментальной 2-формой* $d\alpha$ *тогда и только тогда, когда в* $D_G \cap \ker\alpha$ *существует максимальная подалгебра размерности* $\geqslant 2$*.*

Для инвариантной субтвисторной структуры с произвольной замкнутой фундаментальной 2-формой получаем следующий способ получения однородных сублагранжевых подмногообразий:

Предложение 6.7. *Пусть* $M = G/H$ *– однородное пространство размерности* $\geqslant 5$ *с начальной точкой* o*,* $(\Omega, D, \varPhi, \beta) : d\Omega = 0$ *–* G*-левоинвариантная* H*-правоинвариантная изотропновырожденная субтвисторная структура на группе Ли* G*, и* $\mathrm{ann}(\Omega)$ *– аннулятор фундаментальной 2-формы* Ω*. Если в* $D \cap \mathrm{ann}(\omega)$ *существует максимальная подалгебра* $\mathfrak{q}$ *размерности* $k \geqslant 2$*, то через точку* o *в* M *проходит однородное сублагранжево подмногообразие* Q/H *размерности* k *для соответствующей* G*-инвариантной субтвисторной структуры на* M*, где* $Q = \exp(\mathfrak{q})$*.*

Замечание 6.8. Поскольку для однородного пространства M с нулевой группой когомологий $H^2(M,\ \mathbb{R})$ любая замкнутая 2-форма является точной, для любой субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω на M задачу получения однородных сублагранжевых подмногообразий можно свести к пунктам 3 и 4 теоремы 6.6 для аффинорной метрической структуры с 1-формой $\alpha : d\alpha = \Omega$.

Примеры однородных многообразий с инвариантными аффинорными метрическими структурами и инвариантными субтвисторными структурами можно найти в [5]. Также в [5] получены примеры однородных многообразий, на которых не существует инвариантных аффинорных метрических структур, а следовательно и инвариантных субтвисторных структур с точной фундаментальной 2-формой.

Список литературы

[1] Chu B.-Y., “Symplectic Homogeneous Spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **197** (1974), 145–159.

[2] Calvaruso G., “Three-dimensional homogeneous almost contact metric structures”, *Journal of Geometry and Physics*, **69** (2013), 60–73.

[3] Корнев Е. С., “Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:1 (2012), 107–123.

[4] Корнев Е. С., “Аффинорные структуры на векторных расслоениях”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:6 (2014), 1283–1296.

[5] Корнев Е. С., Славолюбова Я. В., “Инвариантные аффинорные и субкэлеровы структуры на однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:1 (2016), 67–84.

[6] Корнев Е. С., “Субкомплексные и субкэлеровы структуры”, *Сиб. матем. журн.*, **57**:5 (2016), 1062–1077.

[7] Милнор Дж., Сташеф Дж., *Характеристические классы*, Мир, Москва, 1979.

[8] Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1981.

[9] Ш. Кобаяси, К. Намидзу, *Основы дифференциальной геометрии (В 2 т.)*, Наука, Москва, 1981.

[10] Бессе А., *Многообразия Эйнштейна (В 2 т.)*, Мир, Москва, 1990.

Е. С. Корнев (E. S. Kornev)
Кемеровский государственный университет
E-mail: q148@mail.ru