УДК 514

Субтвисторные и субкэлеровы структуры

Корнев Е.С.
Кемеровский государственный университет
q148@mail.ru

Аннотация

вводится понятие субтвисторной структуры, как обобщение твисторных и кэлеровых структур, для многообразий произвольной размерности и вырожденной регулярной 2-формы. приведены примеры таких структур. Рассмотрен частный случай субтвисторных структур - субкэлеровы структуры. Получено условие, когда субтвисторная структура порождает субкэлерову структуру. Также получена параметризация левоинвариантных субтвисторных структур на группах Ли.

1 Субтвисторные структуры

Пусть M – гладкое многообразие, и Ω – билинейная форма класса C^1 на M. *радикалом* формы Ω в точке $x \in M$ называется касательное подпространство

$$\mathrm{rad}\Omega_x = \{v \in T_xM : I_v\Omega_x = 0\},$$

где $I_v\Omega$ обозначает внутреннее произведения вектора v на 2-форму Ω. 2-форма Ω называется *регулярной*, если размерность радикала одинакова во всех точках многообразия M. В этом случае распределение касательных подпространств $\mathrm{rad}\Omega_x$ есть векторное расслоение на M, которое называется *расслоением радикалов* и обозначается через $\mathrm{rad}\Omega$. Очевидно, что билинейная форма Ω невырождена тогда и только тогда, когда $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$. *Рабочим расслоением* на многообразии M с регулярной внешней 2-формой Ω называется регулярное распределение D касательных подпространств на $M : D \oplus \mathrm{rad}\Omega = TM$. Поскольку любая регулярная внешняя 2-форма невырождена только на распределении четной размерности, получаем:

Предложение 1. *Пусть M – гладкое многообразие размерности $n \geq 3$, и Ω – регулярная внешняя 2-форма на M с радикалом ранга $r \geq 1$. Тогда ограничение 2-формы Ω на рабочее расслоение D невырождено, и рабочее расслоение D имеет четный ранг $n - r$ при любом n, а четность числа r всегда совпадает с четностью числа n.*

Определение 1. *Пусть Ω – регулярная внешняя 2-форма на гладком многообразии M с рабочим расслоением D. Аффинором, ассоциированным с 2-формой Ω называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ касательных подпространств на M, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1) $\ker \Phi = \mathrm{rad}\Omega,\ \Phi D = D$;

2) $\Phi^2|_D = -id$, *где* id *– поле тождественных операторов;*

3) $\Omega \circ \Phi = \Omega$;

4) Для любого ненулевого векторного поля X на M $\Omega(X, \Phi X) > 0$.

Из определения 1 следует, что билинейная форма $\Omega(X, \Phi Y),\ X, Y \in C^1(TM)$ есть симметричная вырожденная 2-форма на M и ее ограничение на рабочее расслоение D есть скалярное произведение на слоях рабочего расслоения. Эту симметричную 2-форму можно дополнить до римановой метрики на M с помощью специального объекта. *метрикой радикала* называется симметричная билинейная форма β на M : $\mathrm{rad}\beta = D$ и ограничение формы β на $\mathrm{rad}\Omega$ есть невырожденная симметричная положительно определенная 2-форма. Теперь мы получаем, что симметричная билинейная форма

$$g(X, Y) = \Omega(X, \Phi Y) + \beta(X, Y),\ X, Y \in C^1(TM)$$

есть риманова метрика на M.

Определение 2. *Пусть M – гладкое многообразие размерности ≥ 3. субтвисторной структурой на M называется четверка (Ω, D, Φ, β), где Ω – регулярная внешняя 2-форма на M, D – рабочее расслоение для Ω, Φ – аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω и β – метрика радикала $\mathrm{rad}\Omega$. Внешняя 2-форма Ω называется фундаментальной 2-формой субтвисторной структуры.*

Замечание 1. *Поскольку метрика радикала β обладает свойством $D = \mathrm{rad}\beta$, задание метрики радикала полностью определяет рабочее расслоение. Поэтому, субтвисторную структуру можно рассматривать как тройку (Ω, Φ, β).*

Частными случаями субтвисторной структуры являются кэлерова и контактная метрическая структуры. Если размерность многообразия M четна, фундаментальная 2-форма Ω невырождена и замкнута, аффинор Φ есть комплексная структура на M, ассоциированная с 2-формой Ω, а метрика радикала нулевая, мы получаем классическую кэлерову структуру. Если размерность многообразия M нечетна, $\Omega = d\alpha$, $\mathrm{rank}(\mathrm{rad} d\alpha) = 1$, а $\beta = \alpha \otimes \alpha$, мы получаем контактную метрическую структуру. Приведем примеры субтвисторных структур с радикалом ранга больше 1.

Пример 1. *Пусть M – кэлерово многообразие комплексной размерности $n \geq 2$ с кэлеровой структурой (Ω_0, J, h), $P \to M$ – главное расслоение над M с проекцией π и слоями размерности r, и Q – некоторая связность на главном расслоении P. Отображение $d\pi$ задает изоморфизм распределений Q и TM. Определим на многообразии P внешнюю 2-форму $\Omega = \Omega_0 \circ d\pi$. Очевидно, что Ω есть замкнутая вырожденная 2-форма на P с радикалом ранга r. В качестве рабочего расслоения мы берем связность Q. Аффинор Φ, ассоциированный с 2-формой Ω, на слоях рабочего расслоения Q однозначно определяется комплексной структурой J на M, а на слоях расслоения P он тождественно равен нулю. Поскольку слои главного расслоения - это группы Ли, а на группе Ли всегда существует левоинвариантная риманова метрика g_0, метрику радикала можно определить как симметричную билинейную форму $\beta : \mathrm{rad}\beta = Q$, а ограничение β на вертикальные слои совпадает с g_0. Мы получили на многообразии P субтвисторную структуру (Ω, Q, Φ, β) с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга r.*

Этот пример приводит к следующему результату:

Предложение 2. *Пусть $P \to M$ – главное расслоение со слоями размерности r над кэлеровым многообразием M. Тогда на многообразии P существует субтвисторная структура с радикалом ранга r и замкнутой фундаментальной 2-формой.*

В [1] доказано, что если многообразие M допускает субтвисторную структуру с замкнутой фундаментальной 2-формой и радикалом ранга r, то M есть слоение со слоями размерности r. Также в [1] можно найти топологические условия существования на многообразии субтвисторной структуры.

Пример 2. *Пусть M – параллелизуемое гладкое многообразие размерности $n \geq 3$, и Ω – регулярная внешняя 2-форма на M с радикалом ранга r. На M существует набор из n векторных полей $e_1, \dots, e_n$ линейнонезависимых в каждой точке. Этот базис порождает на M стандартную евклидову метрику g. Выберем рабочее расслоение D для 2-формы Ω как ортогональное относительно метрики g дополнение к $\mathrm{rad}\Omega$. Получаем, что существует число $k \geq 1 : n - r = 2k$, и $e_1, \dots, e_{2k}$ есть базис распределения D. Поскольку 2-форма Ω невырождена на D, в базисе $e_1, \dots, e_n$ она имеет вид:*

$$\Omega = \sum_{i<j\leq 2k} a_{ij} e_i^* \wedge e_j^*,$$

где a_{ij} – гладкие функции на M отличные от нуля в каждой точке. Рассмотрим поле эндоморфизмов Φ касательных пространств, заданное условиями:

$$g(\Phi e_i, e_j) = \delta_{ij},$$
$$g(\Phi e_i, \Phi e_j) = g(e_i, e_j),\ i \leq 2k, j \leq 2k,$$

где $\delta_{ij} = \mathrm{sign}\varepsilon a_{ij}$ при $i, j \leq 2k$, ε – перестановка чисел i, j, $\delta_{ij} = 0$ при $i > 2k$ или $j > 2k$. Можно проверить, что поле эндоморфизмов Φ удовлетворяет всем условиям в определение 1. Метрику радикала можно задать как симметричную билинейную форму $\beta : \mathrm{rad}\beta = D$, $\beta|_{\mathrm{rad}\Omega} = g|_{\mathrm{rad}\Omega}$. Мы получаем субтвисторную структуру (Ω, D, Φ, β) с радикалом ранга r.

Поскольку на параллелезуемом многообразии любая риманова метрика определяет глобальный ортонормированный репер, получаем:

Предложение 3. *Пусть M – параллелезуемое гладкое многообразие размерности ≥ 3. Любая пара (Ω, g), где Ω – регулярная ненулевая внешняя 2-форма на M с радикалом ранга r, g – риманова метрика на M полностью определяет субтвисторную структуру с радикалом ранга r на M.*

Поскольку на параллелезуемом многообразии всегда можно построить регулярную внешнюю 2-форму с радикалом любого допустимого ранга, получаем:

Следствие 1. *На гладком параллелезуемом многообразии размерности $n \geq 3$ для любого натурального числа $k \leq \frac{n}{2}$ всегда существует субтвисторная структура с радикалом ранга $n - 2k$.*

Примером многообразия, на котором не существует субтвисторных структур с радикалом любого ранга является четырехмерная сфера. Этот факт доказан в [1].

2 субкэлеровы структуры

Пусть M – гладкое вещественное многообразие размерности ≥ 3. *субкэлеровой структурой* на M называется субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) вместе с гладким подмногообразием $Q : TQ = D|_Q$, $d\Omega|_Q = 0$ и ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q. В случае, когда $\mathrm{rad}\Omega = \{0\}$ субкэлерова структура есть классическая кэлерова структура, и $Q = M$.

Пример 3. *Рассмотрим многообразие $M \times \mathbb{R}$, где M – гладкое вещественное многообразие размерности $n \geq 3$, $\mathbb{R}$ – вещественная прямая. Пусть Z – базисное векторное поле на $\mathbb{R}$, f – гладкая функция на M такая, что $df \neq 0$ в каждой точке из M, и g – риманова метрика прямого произведения на $M \times \mathbb{R}$. Обозначим через ξ векторное поле на M :*

$df(\xi) = 1$, а через α 1-форму $Z^* = I_Z g$. Пусть P – подкрученное произведение M на $\mathbb{R}$ со скобкой Ли векторных полей, заданной следующим образом: $[X, Y] = [X, Y]_M$, $X, Y \in C^1(TM)$, $[X, Z] = -[Z, X] = df(X)Z$ для любого $X \in C^1(TM)$. Имеем: $d\alpha(X, Y) = 0$ при $X, Y \in C^1(TM)$, $d\alpha(X, Z) = -\frac{\alpha([X,Z])}{2} = -\frac{df(X)}{2}$. Отсюда: $d\alpha(\xi, Z) \neq 0$, $d\alpha(X, Z) = 0$ при $X \in \ker(df)$. Получаем, что ранг 2-формы $d\alpha$ равен $n-1$, а векторные поля ξ, Z порождают инволютивное распределение D касательных подпространств ранга 2. По теореме Фробениуса в P существует гладкое подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$.

Зададим на P аффинор Φ следующим образом:

$$\Phi X = 0, \ X \in \ker(df),$$
$$\Phi\xi = Z, \ \Phi Z = -\xi.$$

Поскольку на вещественном многообразии размерности 2 любая почти комплексная структура интегрируема, ограничение аффинора Φ на Q есть комплексная структура на Q, ассоциированная с внешней 2-формой $d\alpha|_Q$. Ограничение метрики g на $\mathrm{rad}(d\alpha) = \ker(df)$ порождает метрику радикала $\beta : \mathrm{rad}\beta = D$. Мы получаем субкэлерову структуру $(Q, d\alpha, D, \Phi, \beta)$ на многообразии P.

Чтобы выяснить, когда субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой индуцирует субкэлерову структуру, необходимо определить понятие кручения.

Определение 3. *Кручением субтвисторной структуры (Ω, D, Φ, β) называется непрерывное кососимметричное тензорное поле N:*

$$N(X, Y) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y], \ X, Y \in C^1(TM).$$

Теорема 1. *Любая субтвисторная структура с замкнутой фундаментальной 2-формой и нулевым кручением на гладком многообразии M размерности ≥ 3 порождает на M субкэлерову структуру.*

Доказательство. Пусть $(\Omega, D, \Phi, \beta) : d\Omega = 0$ – субтвисторная структура на многообразии M, и N – кручение этой структуры. Обозначим через X_D проекцию векторного поля X на рабочее расслоение D, а через X_R проекцию векторного поля X на $\mathrm{rad}\Omega$. Поскольку $\Phi TM = D$ и $TM = D \oplus \mathrm{rad}\Omega$, при $N = 0$ для любых $X, Y \in C^1(TM)$ имеем:

$$[\Phi X, \Phi Y]_R = N(X, Y)_R = 0,$$

т. е. $[\Phi X, \Phi Y] \in D$ для любых $X, Y \in D$. Поскольку аффинор Φ есть линейный автоморфизм слоев рабочего расслоения D, получаем, что распределение D инволютивно. По теореме Фробениуса в M существует подмногообразие $Q : TQ = D|_Q$. Из свойств аффинора Φ (см. определение 1) следует, что ограничение кручения N на Q есть тензор Нейенхейса почти комплексной структуры Φ на Q. Из условия $N = 0$ получаем, что Φ есть комплексная структура на Q, а (Ω, Φ, h), $h(X, Y) = \Omega(X, \Phi Y)$, $X, Y \in C^(TQ)$ есть кэлерова структура на Q. □

Из доказательства теоремы 1 получаем следующее:

Следствие 2. *Пусть (Ω, D, Φ, β) – субтвисторная структура на гладком многообразии M размерности $\geq$, и N – кручение этой структуры.*

1) *Если рабочее расслоение D неинволютивно, то субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) не индуцирует на M субкэлерову структуру;*

2) *Если $N = 0$, то рабочее расслоение D есть инволютивное распределение на M, и Φ есть комплексная структура на любом подмногообразии $Q : TQ = D|_Q$.*

3) *Если* $d\Omega = 0,\ N = 0$, *то рабочее расслоение* D *есть идеал в алгебре векторных полей на* M*;*

4) *Если* $d\Omega = 0,\ N = 0$, *то* M *есть слоение с кэлеровыми слоями, и кэлерова структура на каждом слое* Q *есть* $(\Omega, \Phi, h)|_Q,\ h(X,Y) = \Omega(X, \Phi Y),\ X, Y \in C^1(TM$.

Замечание 2. *Пусть* N *– кручение субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой* Ω*. Поскольку расслоение радикалов субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой всегда инволютивно, из определения 3 и свойств аффинора следует, что* $N|_{\mathrm{rad}\Omega} = 0$ *даже когда рабочее расслоение неинволютивно.*

3 Левоинвариантные субтвисторные структуры на группах Ли

Пусть G – группа Ли размерности ≥ 3. субтвисторная структура (Ω, D, Φ, β) на группе G называется левоинвариантной, если Ω и β есть левоинвариантные билинейные формы на G, D есть левоинвариантное распределение на G, а аффинор Φ коммутирует с дифференциалом левого сдвига на любой элемент группы G. Для левоинвариантной субтвисторной структуры с замкнутой фундаментальной 2-формой Ω $\mathrm{rad}\Omega$ всегда есть подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и порождает связную подгруппу R. эта подгруппа называется *подгруппой радикала*. Подгруппа радикала совпадает с компонентой связности единицы подгруппы изотропии относительно коприсоединенного действия группы G на 2-форму Ω. Это означает, что 2-форма Ω является G-левоинвариантной и R-правоинвариантной. С учетом теоремы 1 получаем:

Предложение 4. *Пусть* (Ω, D, Φ, β) *– левоинвариантная субтвисторная структура с кручением* N *на группе Ли* G *размерности* ≥ 3*, и пусть* R *– подгруппа радикала для этой субтвисторной структуры.*

1) *Если* $d\Omega = 0$*, эта субтвисторная структура индуцирует на однородном пространстве* G/R G*-инвариантную почти кэлерову структуру;*

2) *Если* $d\Omega = 0,\ N = 0$*, эта субтвисторная структура индуцирует на однородном пространстве* G/R G*-инвариантную кэлерову структуру.*

Из доказательства теоремы 1 и свойства 3) следствия 2 получаем:

Предложение 5. *Пусть* $(\Omega, D, \Phi, \beta)\ :\ d\Omega = 0$ *– левоинвариантная субтвисторная структура с нулевым кручением на группе Ли* G *размерности* ≥ 3*. Тогда в* G *существуют связные подгруппы* $H = \exp(D),\ R = \exp(\mathrm{rad}\Omega)$ *такие, что группа* G *локально изометрична полупрямому произведению* $R \rtimes H$*. При этом* $(\Omega, \Phi, \Omega_\Phi)$*, где* $\Omega_\Phi(X,Y) = \Omega(X, \Phi Y),\ X, Y \in C^1(TM)$*, есть левоинвариантная кэлерова структура на* H*, а* β *есть левоинвариантная риманова структура на* R*.*

Пусть G – группа Ли размерности $n \geq 3$, Ω – левоинвариантная регулярная внешняя 2-форма на G с радикалом ранга $r \geq 1$, и $2k = n - r$. В фиксированном базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}$ 2-форму Ω можно отождествить с кососимметрической матрицей

$$\Omega = \begin{pmatrix} A_{2k} & 0 \\ 0 & 0_r \end{pmatrix},$$

где A_{2k} – кососимметрическая невырожденная матрица порядка $2k$, 0_r – нулевая матрица порядка r. Используя метод приведения внешней 2-формы к каноническому виду, для любой левоинвариантной внешней 2-формы Ω с радикалом ранга r всегда можно получить базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором Ω имеет вид:

$$\Omega = e_1^* \wedge e_2^* + \ldots + e_{2k-1} \wedge e_{2k}^*.$$

При этом векторные поля $e_1, \ldots, e_{2k}$ порождают рабочее расслоение для 2-формы Ω, а векторные поля $e_{2k+1}, \ldots, e_n$ порождают $\mathrm{rad}\Omega$. Этот базис называется *каноническим базисом.* В каноническом базисе любой аффинор, ассоциированный с 2-формой Ω, имеет диагональный вид

$$\varPhi = \begin{pmatrix} J_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \ldots & J_k & 0 \\ 0 & \ldots & 0_r \end{pmatrix},$$

где $J_l,\ l = 1, \ldots, k$ – блок вида $\begin{matrix} a_l & b_l \\ c_l & -a_l \end{matrix}$, $a_l^2 + b_l c_l = -1$. Из условия $b_l c_l = -a_l^2 - 1$ следует, что числа b_l и c_l имеют разные знаки. Положим $z_l = a_l + b_l i,\ b_l < 0,\ i = \sqrt{-1}$. Получаем, что множество всех аффиноров, ассоциированных с 2-формой Ω параметризуется точками подпространства

$$\mathbb{C}_-^k = \{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k : Im\, z_l < 0,\ 1 \le l \le k\}.$$

Любая левоинвариантная метрика радикала 2-формы Ω в каноническом базисе отождествляется с симметрической положительно определенной матрицей порядка r. Размерность множества всех таких матриц равна $\frac{r^2+r}{2}$. Размерность множества всех кососимметрических матриц порядка $2k = n - r$ равна $2k^2 - k$. Обозначим через (n) множество всех кососимметрических невырожденных матриц порядка n, а через $\mathrm{B}(r)$ множество всех симметрических положительно определенных матриц порядка r. Теперь мы получаем параметризацию левоинвариантных субтвисторных структур на группе Ли:

Теорема 2. *Множество всех левоинвариантных субтвисторных структур с радикалом ранга r на группе Ли размерности $n \ge 3$ гомеоморфно $\mathrm{A}(2k) \times \mathbb{C}_-^k \times \mathrm{B}(r),\ 2k = n - r$, и имеет вещественную размерность $2k^2 + k + \frac{r^2+r}{2}$.*

Пусть $(\Omega, D, \varPhi, \beta)$ – левоинвариантная субтвисторная структура на группе Ли G, и N – кручение этой структуры. В фиксированном базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}$ условия $d\Omega = 0,\ N = 0$ есть уравнения на коэффициенты внешней 2-формы Ω и аффинора $\varPhi$. Эти уравнения задают поверхность S в пространстве всех левоинвариантных субтвисторных структур. Из теорем 1 и 2 получаем, что любая левоинвариантная субтвисторная структура, лежащая на поверхности S индуцирует на группе G левоинвариантную субкэлерову структуру. Однако могут существовать левоинвариантные субкэлеровы структуры, не лежащие на этой поверхности.

Комплексной собственной подалгеброй для левоинвариантной субтвисторной структуры $(\Omega, D, \varPhi, \beta)$ называется подалгебра $\mathfrak{q} \subseteq D : \varPhi\mathfrak{q} = \mathfrak{q}$, и для любых $X, Y \in \mathfrak{q}$ $[\varPhi X, Y] = \varPhi[X, Y]$. Комплексная собственная подалгебра $\mathfrak{q}$ порождает в группе G связную подгруппу $Q = \exp(\mathfrak{q})$. Ограничение аффинора $\varPhi$ на подгруппу Q есть почти комплексная структура на Q. Пусть N – тензор Нейенхейса этой почти комплексной структуры. Для любых $X, Y \in \mathfrak{q}$ имеем:

$$\begin{aligned} N(X,Y) = [\varPhi X, \varPhi Y] - \varPhi[\varPhi X, Y] - \varPhi[X, \varPhi Y] - [X, Y] = \\ = [\varPhi X, \varPhi Y] + [X, Y] - [\varPhi X, \varPhi Y] - [X, Y] = 0. \end{aligned}$$

Получаем, что $\varPhi$ есть комплексная структура на Q, ассоциированная с внешней 2-формой Ω. Если $d\Omega = 0$, мы получаем левоинвариантную субкэлерову структуру $(Q, \Omega, D, \varPhi, \beta)$. Теперь получаем:

Предложение 6. *Пусть* (Ω, D, Φ, β) : $d\Omega = 0$ – *левоинвариантная субтвисторная структура на группе Ли* G *размерности* ≥ 3. *Если рабочее расслоение* D *содержит ненулевую комплексную собственную подалгебру, то эта субтвисторная структура индуцирует левоинвариантную субкэлерову структуру на* G.

Предложение 6 справедливо даже для субтвисторных структур с ненулевым кручением и неинволютивным рабочим расслоением.

Замечание 3. *Поскольку любая группа Ли является параллелезуемым многообразием, и выбор левоинвариантного базиса алгебры Ли группы Ли* G *порождает левоинвариантную евклидову метрику на* G, *из примера 2 следует, что выбор на группе* G *левоинвариантного базиса алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *и левоинвариантной внешней 2-формы* Ω *с радикалом ранга* r *полностью определяет на* G *левоинвариантную субтвисторную структуру с радикалом ранга* r.

Библиографический список

1. Корнев Е. С. Субкомплексные и субкэлеровы структуры — Сиб. матем. журн. 2016. т. 57. № 5. С. 1062-1077.