Инвариантные метрики радикала 1-форм на группах Ли

Е. С. Корнев
КемГУ

Радикалом левоинвариантной 1-формы α на группе Ли G называется подалгебра $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ такая, что для любых $X \in \mathfrak{r}$ и $Y \in \mathfrak{g}, d\alpha(X, Y) = 0$. Подгруппа порожденная радикалом $\mathfrak{r}$ называется подгруппой радикала.

Пусть G – связная группа Ли, α – левоинвариантная 1-форма на G, $\mathfrak{r}$ – ее радикал и R – подгруппа радикала.

Определение. *Метрикой радикала $\mathfrak{r}$ называется левоинвариантная симметричная неотрицательная 2-форма β, обладающая свойствами:*

(1) *форма β невырождена на $\mathfrak{r}$.*

(2) *Форма β имеет радикал максимальной размерности, т. е. алгебру Ли группы G можно представить в виде прямой суммы векторных пространств $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \operatorname{rad} \beta$.*

Из определения видно, что сужение формы β на $\mathfrak{r}$ задает на $\mathfrak{r}$ риманову метрику.

Пример 1. Пусть группа G имеет вид $H \times R$, где H – симплектическая группа Ли с левоинвариантной симплектической структурой Ω, а R – коммутативная группа Ли. Пусть g_0 – стандартная левоинвариантная евклидова метрика на G в некотором фиксированном базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а α - левоинвариантная 1-форма на G, такая, что сужение $d\alpha$ на H совпадает с Ω. Поскольку $d\alpha$ не вырождается на H, а группа R – коммутативна, то для любых $X \in \mathfrak{r}$ и $Y \in \mathfrak{g}$ получаем:

$$d\alpha(X, Y) = -1/2\, \alpha([X, Y]) = 0,$$

т. е. $\operatorname{rad} \alpha = \mathfrak{r}$, а в качестве метрики радикала можно взять форму $g_0 \circ d\pi$, где π – проекция G на R вдоль H.

Пример 2. Пусть G – неразрешимая группа Ли, R – максимальная разрешимая подгруппа в G, допускающая левоинвариантную точную симплектическую структуру Ω, и α – левоинвариантная 1-форма на G, такая, что сужение $d\alpha$ на R совпадает с Ω. По теореме Леви (см., например, [1]) группу G можно представить в виде $G = S \rtimes R$, где S – некоторая полупростая группа Ли. Если для любого $X \in S$ образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно действия оператора ad_X лежит в ядре формы α, то $\mathrm{rad}\,\alpha = \mathfrak{s}$ и форма $\beta = -B$, где B – форма Киллинга-Картана, задает левоинвариантную метрику радикала на G.

Предложение 1. *Если G – связная контактная группа Ли с левоинвариантной контактной формой α, то любая левоинвариантная метрика радикала на группе G имеет вид:*

$$\beta = \lambda\, \alpha \otimes \alpha, \lambda \in \mathbb{R} > 0.$$

Обозначим радикал метрики радикала β через D. D можно рассматривать как левоинвариантное распределение на группе G. Из определения метрики радикала следует, что $\mathfrak{g} = D \oplus \mathfrak{r}$. Поскольку $\mathfrak{r}$ является подалгеброй, то Ad_R действует на $\mathfrak{r}$ инвариантно. Если Ad_R действует инвариантно на D, то алгебра Ли G редуцируема в смысле Намидзу.

Предложение 2. *Если метрика радикала является Ad_R-инвариантной, тогда распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала.*

Предложение 3. *Пусть β – левоинвариантная метрика радикала $\mathfrak{r}$ на группе Ли G и $D = \mathrm{rad}\,\beta$. Тогда, если подгруппа радикала R является компактной унимодулярной подгруппой в G, и проекция π алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на подалгебру $\mathfrak{r}$ вдоль D коммутирует с присоединенным действием подгруппы радикала, то распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы R.*

Замечание 4. *Если подгруппа радикала R является максимальным тором в G и проекция $\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{r}$ вдоль радикала D некоторой левоинвариантной метрики радикала $\mathfrak{r}$, коммутирует с присоединенным действием максимального тора, то, поскольку любой тор* *является коммутативной унимодулярной группой, распределение D инвариантно относительно присоединенного действия максимального тора R.*

Обозначим через P расслоение $G \xrightarrow{\pi'} G/R$, где π' – естественная проекция G на G/R.

Теорема 5. *Пусть G – связная группа Ли, α – левоинвариантная 1-форма на G с радикалом $\mathfrak{r}$, β – левоинвариантная метрика радикала, D – радикал формы β, подгруппа радикала R является максимальным тором в G и проекция $\pi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{r}$ вдоль D коммутирует с присоединенным действием подгруппы радикала, тогда:*

(1) *Распределение D инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала и является связностью расслоения P.*

(2) *Форма связности D имеет вид:*

$$\omega(X) = \sum_{i=1}^{m} \beta(X, E_i)\, E_i,$$

где $E_1, \ldots, E_m$ – фиксированный ортонормированный относительно метрики β базис радикала $\mathfrak{r}$, m – размерность радикала $\mathfrak{r}$, $X \in \mathfrak{g}$.

(3) *Связность D является плоской (т. е. имеет нулевую форму кривизны связности) тогда и только тогда, когда распределение D инволютивно.*

Замечание 6. *Утверждения теоремы 5 также справедливы в следующих двух случаях:*

(1) Подгруппа радикала R является коммутативной (необязательно компактной) подгруппой, а метрика радикала является Ad_R-инвариантной.

(2) Подгруппа радикала – произвольная подгруппа в G, а любое векторное поле из $\mathfrak{g}$ является Ad_R-инвариантным.

Предложение 7. *Пусть α – левоинвариантная незамкнутая 1-форма на группе Ли G и D –радикал левоинвариантной метрики радикала формы α. Тогда, если D является подалгеброй алгебры Ли группы G, то D не может лежать в ядре формы α.*

Замечание 8. *Если α – левоинвариантная контактная структура на группе Ли G, то любая левоинвариантная метрика радикала формы α пропорциональна 2-форме $\alpha \otimes \alpha$, а её радикал совпадает с ядром формы α. Следовательно в контактном случае распределение D не может быть подалгеброй.*

Пусть распределение D инволютивно и инвариантно относительно присоединенного действия подгруппы радикала. В этом случае D является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, и алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна полупрямому произведению подалгебры D и радикала $\mathfrak{r}$. Обозначим через H связную подгруппу, порожденную подалгеброй D. В [2] доказано, что изоморфизм алгебр Ли влечет локальный изоморфизм групп Ли. Следовательно, существует локальный изоморфизм группы G на полупрямое произведение подгрупп H и R. Этот изоморфизм задает локальный гомеоморфизм топологических пространств G и $H \times R$.

Если считать, что подгруппа радикала действует на группе G умножением справа, то можно ввести расслоение $G \xrightarrow{\pi} H$ со слоем R и проекцией π. Будем обозначать это расслоение через L. Если подгруппа радикала R коммутативна, то подалгебра D является плоской связностью расслоения L с формой связности ω из пункта (2) теоремы 5. Заметим, что в расслоении L уже не требуется, чтобы подгруппа радикала была коммутативной и компактной. Более того, если метрика радикала является Ad_R-инвариантной, то можно снять требование Ad_R-инвариантности подалгебры D, поскольку оно следует из предложения 2. Из предложения 7 и замечания 8 следует, что расслоение L нельзя построить для левоинвариантных контактных структур.

Библиографический список

[1] *Серр Ж.-П.* Группы Ли и алгебры Ли. – Москва: Мир, 1969.

[2] *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – Москва: Мир, 1964.