514.76

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИВОДИМЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. С. КОРНЕВ

Аннотация. В работе вводится специальный класс почти комплексных структур, для которых существует разложение касательного пространства в прямую сумму подпространств, на которых эти структуры действуют инвариантно. Приводятся некоторые понятия и результаты для таких почти комплексных структур на однородных пространствах.

Пусть M – однородное риманово пространство размерности $2n$, G – связная группа Ли, действующая на M транзитивно, H – подгруппа изотропии фиксированного элемента $o \in M$, группа $K = G/H$ и g – Ad_H-инвариантная риманова метрика на G. Тогда $M \cong K$ и $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы изотропии H, а $\mathfrak{p}$ – ее ортогональное дополнение относительно метрики g. Подпространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму Ad_H-неприводимых векторных подпространств. Если распределение $\mathfrak{p}$ инволютивно, то оно является алгеброй Ли группы K.

Почти комплексной структурой на вещественном четномерном многообразии M называется непрерывное поле вещественных линейных операторов $J_x : T_xM \mapsto T_xM : J_x \circ J_x = -\mathrm{id}$ для всех $x \in M$. Пусть R_g – представление группы G в группе собственных дифференцируемых преобразований однородного пространства M, ядро которого совпадает с H. Почти комплексная структура J на M называется G-инвариантной, если для любых $g \in G$ и $x = R_g \in M, J_x = dR_g \circ J_o \circ dR_{g^{-1}}$. Множество G-инвариантных почти комплексных структур на однородном пространстве M находится во взаимно-однозначном соответствии со множеством левоинвариантных почти комплексных структур на группе K. Если подгруппа изотропии H имеет четную размерность, то любая левоинвариантная почти комплексная структура на группе G, инвариантно действующая на $\mathfrak{k}$, определяет G-инвариантную почти комплексную структуру на M.

Определение 1. *Почти комплексная структура J на многообразии M называется приводимой, если для любого нетривиального подпространства инвариантного относительно действия структуры J существует дополнительное подпространство, также инвариантное относительно действия J.*

Теорема 2. *Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура на четномерном вещественном однородном пространстве $M \cong G/H$, тогда векторное пространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму неприводимых подпространств инвариантных относительно действия почти комплексной структуры J. А матрица структуры J в фиксированном базисе пространства $\mathfrak{p}$ принимает блочно-диагональный вид:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

где A_k – квадратная матрица порядка n_k.

Индексом приводимой почти комплексной структуры J называется число инвариантных неприводимых компонент разложения пространства $\mathfrak{p}$. Из теоремы 2 следует, что если $\dim(M) = 2n$, то $1 \leq i_J \leq n$, где i_J индекс почти комплексной структуры J. Для приводимых почти комплексных структур индекса n размерность любого неприводимого инвариантного подпространства равна 2.

Почти комплексная структура J на вещественном многообразии размерности $2n$ называется интегрируемой (комплексной) если для любой точки $x \in M$ существует окрестность U и локальные координаты $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ в этой окрестности согласованные с действием этой структуры. Т. е. во всех точках из $U, \partial/\partial y_k = J\partial/\partial x_k$, для $k = 1, 2, \dots, n$. Тензором Нейенхейса почти комплексной структуры J называется тензор N такой, что для любых векторных полей X и Y,

$$N(X, Y) = 2\left([JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]\right).$$

Доказано, что почти комплексная структура интегрируема тогда, и только тогда, когда ее тензор Нейенхейса тождественно равен 0.

Теорема 3. *Пусть $M \cong G/H$ – четномерное вещественное однородное пространство размерности $2n$. Тогда, если группа $K = G/H$ является полупростой, причем любой простой идеал в алгебре Ли группы K имеет размерность 2, то на M всегда существует G-инвариантная интегрируемая приводимая почти комплексная структура индекса n.*

Теорема 4. *Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура индекса 2 на однородном пространстве $M \cong G/H$, группа G имеет нетривиальный центр, A и B – подпространства инвариантные относительно действия структуры J. Причем, A лежит в центре алгебры Ли группы G, а тензор Нейенхейса структуры J равен 0 на B. Тогда структура J интегрируема.*

Почти комплексная структура J называется ортогональной относительно метрики g, если для любых векторных полей X и $Y, g(JX, JY) = g(X, Y)$. Т. Е. J является ортогональным оператором. Пересечение классов ортогональных и приводимых почти комплексных структур на однородных римановых пространствах описывает следующая теорема:

Теорема 5. *G-инвариантная ортогональная почти комплексная структура J на римановом однородном пространстве $M \cong G/h$ является приводимой тогда, и только тогда, когда ортогональное дополнение алгебры Ли подгруппы изотропии H содержит нетривиальное подпространство инвариантное относительно действия структуры J.*

Для описания связи между подпространствами инвариантными относительно действия почти комплексной структуры и Ad_H-инвариантными подпространствами необходимо ввести два специальных класса однородных пространств.

Определение 6. *Однородное риманово пространство $M \cong G/H$ называется правильным, если для любого Ad_H-инвариантного неприводимого подпространства существует ортогональное ему Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство той же размерности. И называется неправильным, если пространство $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp}$ содержит хотя бы одно Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство, для которого не существует ортогонального Ad_H-инвариантного неприводимого подпространства той же размерности. Неправильное однородное риманово пространство называется строго неправильным, если все Ad_H-инвариантные неприводимые подпространства имеют разную размерность.*

Левоинвариантная почти комплексная структура J на группе G называется изотропно-инвариантной, если для любых $h \in H, \mathrm{Ad}_h \circ J = J \circ \mathrm{Ad}_h$. Изотропно-инвариантная почти комплексная структура всегда переводит Ad_H-инвариантное подпространство в Ad_H-инвариантное подпространство.

Теорема 7. *Пусть $M \cong G/H$ – неправильное однородное пространство с Ad_H-инвариантной римановой метрикой, группа G и подгруппа H имеют четную размерность. Тогда любая ортогональная изотропно-инвариантная почти комплексная структура на группе G является приводимой и определяет G-инвариантную приводимую почти комплексную структуру на M. Причем, подпространства инвариантные относительно действия почти комплексной структуры являются Ad_H-инвариантными (не обязательно Ad_H-неприводимыми). Если M является строго неправильным однородным пространством, то неприводимые инвариантные относительно действия почти комплексной структуры подпространства совпадают с неприводимыми Ad_H-инвариантными подпространствами.*

Пусть Ω – G-инвариантная симплектическая форма на однородном многообразии M. Каноническим базисом расслоения T^*M называется базис $\theta_1, \dots, \theta_{2n}$, в котором форма Ω принимает вид:

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \dots + \theta_{2n-1} \wedge \theta_{2n}.$$

Если $e_1, \dots, e_{2n}$ – базис расслоения TM дуальный каноническому базису расслоения T^*M, то любая приводимая почти комплексная структура J максимального индекса, с инвариантными подпространствами $\{e_1, e_2\}, \dots, \{e_{2n-1}, e_{2n}\}$ сохраняет форму Ω и порождает G-инвариантную почти кэлерову метрику

$$g_J : g_J(X, Y) = \Omega(X, JY).$$

Причем, почти комплексная структура J является ортогональной относительно метрики g_J.

Евгений Сергеевич Корнев
Кемеровский государственный университет,
ул. Красная 6,
650043, Кемерово, Россия
E-mail address: q148@mail.ru