Аффинорная геометрия на однородных пространствах

Е.С. Корнев

Кемеровский государственный университет, Красная 6, 650043, Кемерово, Россия
q148@mail.ru

работа поддержана грантом РФФИ, грант 12-01-00873-а
а также грантом Президента РФ по поддержке научных школ, проект НШ-544.2012.1

Пусть M – вещественное риманово однородное пространство размерности $2\,n$, G – связная группа Ли, транзитивно действующая на M, H – подгруппа изотропии некоторого фиксированного элемента $o \in M$ и g – Ad_H-инвариантная риманова метрика на G. $M \cong G/H$ и g задает риманову метрику на M. Пусть $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы изотропии H, и $\mathfrak{p}$ – ее ортогональное дополнение относительно метрики g. Тогда, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ и $Ad_H\,\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}$.

Определение 1. Обобщенным аффинором, или λ-аффинором, на группе G называется непрерывное поле эндоморфизмов Φ алгебры $\mathfrak{g}$ со следующими свойствами:

1. $\Phi(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$,
2. $\Phi^2|_{\mathfrak{p}} = -\,id,\ \Phi|_{\mathfrak{h}} = \lambda\ id,\ \lambda \in \mathbb{R}$,
3. Сужение Φ на $\mathfrak{p}$ сохраняет метрику g, т. е. $g \circ \Phi|_{\mathfrak{p}} = g|_{\mathfrak{p}}$,
4. Внешняя 2-форма $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi(Y)),\ X, Y \in \mathfrak{p}$, невырождена.

0-аффиноры называются просто аффинорами.

Сразу из определения следует, что 1-аффиноры сохраняют метрику g на всей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и каждый λ-аффинор на группе G задаёт ортогональную почти комплексную структуру на однородном пространстве M. Также, из определения 1 следует, что обобщенный аффинор необходимо должен быть левоинвариантным полем операторов.

Пусть α – левоинвариантная 1-форма на группе G. Радикалом формы α называется максимальное подпространство $rad(\alpha) \in \mathfrak{g}$ такое, что для любых $X \in rad, Y \in \mathfrak{g}, d\alpha(X, Y) = 0$. Радикал формы α является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и порождает связную подгруппу R, которая называется подгруппой радикала. Будем считать, что группа G действует на α посредством коприсоединенного действия $Ad^*_G\,\alpha$. В [1] показано, что подгруппа радикала R совпадает со связной компонентой единицы подгруппы изотропии формы α относительно этого действия, и группа G/R всегда имеет четную размерность. Отсюда получаем, что в случае когда подгруппа изотропии 1-формы α является связной, орбита формы α является однородным пространством четной размерности.

Аффинорным однородным пространством называется четномерное риманово однородное пространство $M \cong G/H$ с заданным на группе G 0-аффинором Φ.

Теорема 1. *Пусть $M \cong G/H$ – однородное пространство со связной подгруппой изотропии H, и пусть α – левоинвариантная 1-форма на группе G. Тогда подгруппа радикала формы α совпадает с подгруппой H тогда и только тогда, когда подгруппа H является подгруппой изотропии формы α. При этом, если подгруппа радикала R является компактной, то орбита формы α является аффинорным однородным пространством.*

Теорема 2. *Пусть $M \cong G/H$ – аффинорное однородное пространство со связной подгруппой изотропии H, α – левоинвариантная 1-форма на группе G, подгруппа радикала которой совпадает с H. Тогда, $d\alpha$ задает инвариантную симплектическую структуру на M.*

Внешняя 2-форма Ω из пункта 4 определения 1 называется фундаментальной 2-формой аффинорного однородного пространства.

Теорема 3. *Пусть $M \cong G/H$ – аффинорное однородное пространство с Ad_H-инвариантной метрикой g и замкнутой фундаментальной 2-формой Ω. Тогда, если группа G является односвязной, а подгруппа H является связной, то на G существует 1-форма α, радикал которой совпадает с подалгеброй изотропии $\mathfrak{h}$, а*

$$d\alpha(X,Y) = \Omega(X,Y),\ \ X,Y \in \mathfrak{p}.$$

Следствие. *Пусть $M \cong G/H$ – аффинорное однородное пространство с односвязной группой G, связной подгруппой H и замкнутой фундаментальной 2-формой. Причём, для любого $X \in \mathfrak{p}, ad_{\Phi(X)} = \Phi \circ ad_X$. Тогда, M является кэлеровым пространством*

Если в теореме 2 $\dim(G) = 2n + 1$, а $\dim(H) = 1$, то форма α является контактной структурой на группе G, а метрика g является контактной метрической структурой на G, которые подробно изучены в [2].

Литература

1. Корнев Е. С. *Инвариантные аффинорные метрические структуры на группах Ли.* // Сиб. матем. журн. 2012. т. 53. №1. С. 107-123.

2. Славолюбова Я. В. *Левоинвариантные контактные метрические структуры на группах Ли.* Германия, Саарбрюкен: Lambert Academic Publishing, 2011.